冪零リー代数上の代数的リッチソリトンとサイクルを持つクイバー

大阪公立大学 大学院 理学研究科 数学専攻
北山陽菜 (Hina KITAYAMA) *

概要

quiver とは, ループと多重辺を許す点と矢印で表された有向グラフである. 先行研究では, quiver から nilpotent Lie 代数を作る方法が確立され, cycle を持たない quiver から得られる nilpotent Lie 代数は常に代数的 Ricci soliton を持つことが示された. 本研究では先行研究の構成方法を拡張し, cycle を持つ quiver から nilpotent Lie 代数を構成する方法を確立した. また, 得られた nilpotent Lie 代数が代数的 Ricci soliton を許容するための判定条件を示した. これにより, 様々な step 数の代数的 Ricci soliton を持つ例と持たない例を多数得ることができる.

1 導入

本研究の目的は, nilpotent Lie 代数が代数的 Ricci soliton を持つための条件を研究することである. nilpotent Lie 代数は以下のように定義される.

定義 1.1. Lie 代数 $\mathfrak{n}$ が m-step nilpotent Lie 代数であるとは, 以下を満たすことである:

$$\exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \mathfrak{n}^{m-1} \neq 0, \mathfrak{n}^m = 0$$

ただし, $\mathfrak{n}^i := [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{i-1}], \mathfrak{n}^0 := \mathfrak{n}$.

nilpotent Lie 代数に注目する理由は以下の重要な定理によって示される.

定理 1.2. (Lauret,[1]) 左不変計量つきの単連結 Lie 群 (G, g) と, その (G, g) に対応する内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ に対して, 以下が成り立つ.

(1) $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ が代数的 Ricci soliton ならば, (G, g) は Ricci soliton となる.
(2) G が nilpotent で,(G, g) が Ricci soliton ならば, $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ は代数的 Ricci soliton となる.

このため, 単連結 Lie 群が Ricci soliton を持つかどうかは, それに対応する nilpotent Lie 代数が代数的 Ricci soliton を持つかを調べることで確かめられる. 現状, 2-step までの nilpotent Lie 代数についての研究は進んでいるが, 高い step 数の nilpotent Lie 代数については既知の例が少数である. そこで本研究では, 高い step 数であり, かつ扱いやすい nilpotent Lie 代数の例を多く構成し, それら

* E-mail:pinkblossoms41@outlook.jp

が代数的 Ricci soliton を持つかどうかを調べる.

2　サイクルを含む quiver から得られる nilpotent Lie 代数

本研究では quiver を用いる. サイクルのないクイバーから得られる nilpotent Lie 代数については, 代数的 Ricci soliton を持つことが先行研究で明らかになっている (溝口-田丸,[2]).

定義 2.1. 集合 V, E, 写像 $s, t : E \to V$ に対して, 組 $Q = (V, E, s, t)$ をquiverという. V の元を頂点, E の元を辺, $\alpha \in E$ に対して, $s(\alpha)$ を始点, $t(\alpha)$ を終点という. V と E が有限集合であるとき, quiver Q を有限 quiverという.

定義 2.2. 辺 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$ に対して, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ $(1 \leq i \leq n-1)$ であるとき, 辺の列 $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ が道であるという. このとき, n を道の長さという.

定義 2.3. quiver Q の道 x に対して, $s(x) = t(x)$ であるとき, x をcycle という.

本研究では, cycle を持つ quiver から nilpotent Lie 代数を構成する. そのため, 新たに a-path を定義した.

定義 2.4. quiver $Q = (V, E, s, t)$, $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in E$ に対して, 道 $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m$ が以下を満たすとき, $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_m$ はa-pathであるという:

$$\forall i, j \in \{1, \cdots, m\}(i \leq j),\ \ s(\alpha_i) \neq t(\alpha_j)$$

定義より, a-path はサイクルを含まない道である. quiver Q のすべての a-path の集合を $\mathrm{Apath}(Q)$ とする.

例 2.5. $V = \{v_1, v_2, v_3\}, E = \{a, b, c\}$ とし, $s(a) = v_1$,$s(b) = v_2$, $s(c) = v_3$, $t(a) = v_3$, $t(b) = v_3$, $t(c) = v_1$ とすると cycle を含む quiver となり, 次の図 1 ようになる:

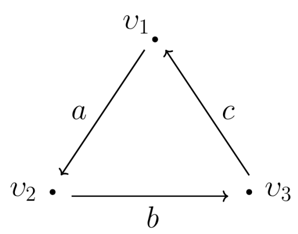

図 1　quiver Q

図 1 の quiver Q から得られる道と a-path は以下のようになる:

- $\mathrm{Path}(Q) = \{a, b, c, ab, bc, ca, abc, abca, \ldots\}$
- $\mathrm{Apath}(Q) = \{a, b, c, ab, bc, ca\}$

道は無限個であるが, 道 abc は cycle を含むことから a-path は 6 個に収まる.

定義 2.6. quiver $Q = \{V, E, s, t\}$ に対して, $\mathfrak{n}_Q^A$ を次で定める:

$$\mathfrak{n}_Q^A := \mathrm{spanApath}(Q).$$

また, $x, y \in \mathrm{Apath}(Q)$ に対して, 積と括弧積を

$$x \cdot y := \begin{cases} xy \; (xy \in \mathrm{Apath}(Q)) \\ 0 \; (xy \notin \mathrm{Apath}(Q)) \end{cases}, [x, y] := x \cdot y - y \cdot x$$

と定めると, $\mathfrak{n}_Q^A$ は Lie 代数となる.

有限 quiver Q に対して, a-path の長さの最大値が存在する.

命題 2.7. Q を有限 quiver とすると, $\mathfrak{n}_Q^A$ は有限次元の nilpotent Lie 代数となる. また, a-path の長さの最大値が m の quiver から得られる Lie 代数は, m-step nilpotent Lie 代数である.

3 主定理

定義 3.1. quiver Q に対して, $\mathfrak{n}_Q^A = \mathrm{span}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k (i, j, k \in \{1, \ldots n\})$ とする. このとき, $X_i, X_j \in \mathrm{Apath}$ に対して $[X_i, X_j] \neq 0$ であるとき, $\{X_i, X_j\}$ を折れ線と呼び, $W_Q := \{\{X_i, X_j\} | [X_i, X_j] \neq 0\} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ と表す. また, X_i, X_j を親, $X_k := [X_i, X_j]$ を子と呼び, $w_h = \{X_i, X_j\}$ に対して, $\pm X_k$ のうち $\mathrm{Apath}(Q)$ に含まれているものを $\bar{w}_h$ と表す.

定義 3.2. quiver Q に対して, Apath(Q) $= \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k (i, j, k \in \{1, \ldots n\})$, $W_Q = \{w_1, \ldots, w_m\} = \{\{X_i, X_j\} | [X_i, X_j] \neq 0, i < j\} = \{\{X_{i_1}, X_{j_1}\}, \ldots, \{X_{i_m}, X_{j_m}\}\}$ とする. このとき, M_Q がquiver から得られる行列であるとは以下を満たすことである:

$$M_Q := (x_{\alpha,\beta})_{\alpha\beta} \in M_m(\mathbb{R})$$

$$x_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 3 \; (w_\alpha = w_\beta) \\ 1 \; (\#(w_\alpha \cap w_\beta) = 1 \text{ または} \bar{w}_\alpha = \bar{w}_\beta (\text{ただし } w_\alpha \neq w_\beta)) \\ -1 \; (\bar{w}_\beta \in w_\alpha \text{ または} \bar{w}_\alpha \in w_\beta) \\ 0 \; (\text{その他}) \end{cases}$$

定義 3.3. $n \times n$ 行列 M に対して, M がpositiveであるとは, 以下を満たすことである:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^n (\text{全ての成分が正}) \text{ s.t. } M\alpha = [1]_n$$

ただし, $[1]_n$ は 1 を縦に n 個並べたベクトルである.

定理 3.4. quiver Q に対して, M_Q を quiver から得られる行列とする. このとき 以下が同値である.

(i) $\mathfrak{n}_Q^A$ が代数的 Ricci soliton を持つ.
(ii) quiver Q から得られる行列 M_Q が positive.

証明には, 定理 3(Nikolayebsky, [3]) の結果を用いる. 定理 3.4 によって, 代数的 Ricci soliton を持つ nilpotent Lie 代数と持たない nilpotent Lie 代数の, 様々な step 数の例を得ることができる.

4　得られた結果

このセクションでは, 図 2, 3 の quiver に定理 3.4 を用いることで得られた結果を紹介する.

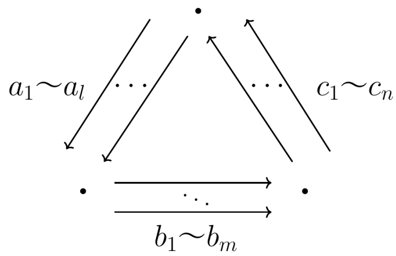

図 2　quiver Q_2

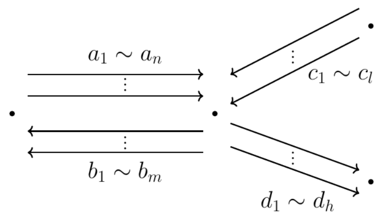

図 3　quiver Q_3

命題 4.1. 図 2 の quiver Q_2 から得られる nilpotent Lie 代数が代数的 Ricci soliton を持つための必要十分条件は以下である:

$$n < l + m + 1, l < m + n + 1, m < n + l + 1.$$

命題 4.2. 図 3 の quiver Q_3 から得られる nilpotent Lie 代数が代数的 Ricci soliton を持つための必要十分条件は以下である:

$$(h + 1)(l + 1) > mn.$$

参考文献

[1] Lauret, J., Ricci soliton solvmanifolds, J. Reine Angew. Math. **650** (2011), 1–21.

[2] Mizoguchi, F. and Tamaru, H., Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons, Advances in Mathematics, **480** (2025), PartA, 110464

[3] Nikolayevsky,Y., Einstein solvmanifolds and the pre-Einstein derivation, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no.8, 3935–3958.